GBGI9U07: document multimédia : description et recherche automatique

A. Rappels mathématiques

Georges Quénot and Philippe Mulhem

Équipe Modélisation et Recherche d'Information Multimédia

Laboratoire d'Informatique de Grenoble

Février 2018

Algèbre linéaire 1

- Espace Vectoriel (EV) V de de dimension n sur un corps K (R ou C), isomorphe à K^n
- Scalaire : élément de K
- Vecteur : élément de V
- Addition de vecteurs
- Multiplication d'un vecteur par un scalaire
- Applications ou formes linéaires:
  - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  - $f(ax) = af(x)$
- Applications : EV $\rightarrow$ EV, formes : EV $\rightarrow$ K
- Aussi : espaces vectoriels de dimension infinie

Algèbre linéaire 2

- Vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$
- Vecteurs lignes : $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T$
- Vecteur ligne : composantes d'un vecteur "normal"
- Vecteur colonne : composantes d'une forme linéaire
- Formes linéaires et vecteurs "normaux" appartiennent à des espaces vectoriels "duaux"
- Transposition : permutation des lignes et des colonnes

Algèbre linéaire 3

- Multiplications :
  - Matrice × vecteur colonne → vecteur colonne
  - Vecteur ligne × matrice → vecteur ligne
  - Matrice × matrice → matrice
  - Vecteur ligne × vecteur colonne → scalaire
  - Vecteur colonne × vecteur ligne → matrice
- Excepté dans le dernier cas, produit "contractant"
  e.g. : $y_i = \sum_j a_{ij}\, x_j$
- Dans le dernier cas : $a_{ij} = y_i x_j$ (pas de somme)
- Contraintes sur les dimensions des objets (égalité des dimensions "contractées")

Algèbre linéaire 4

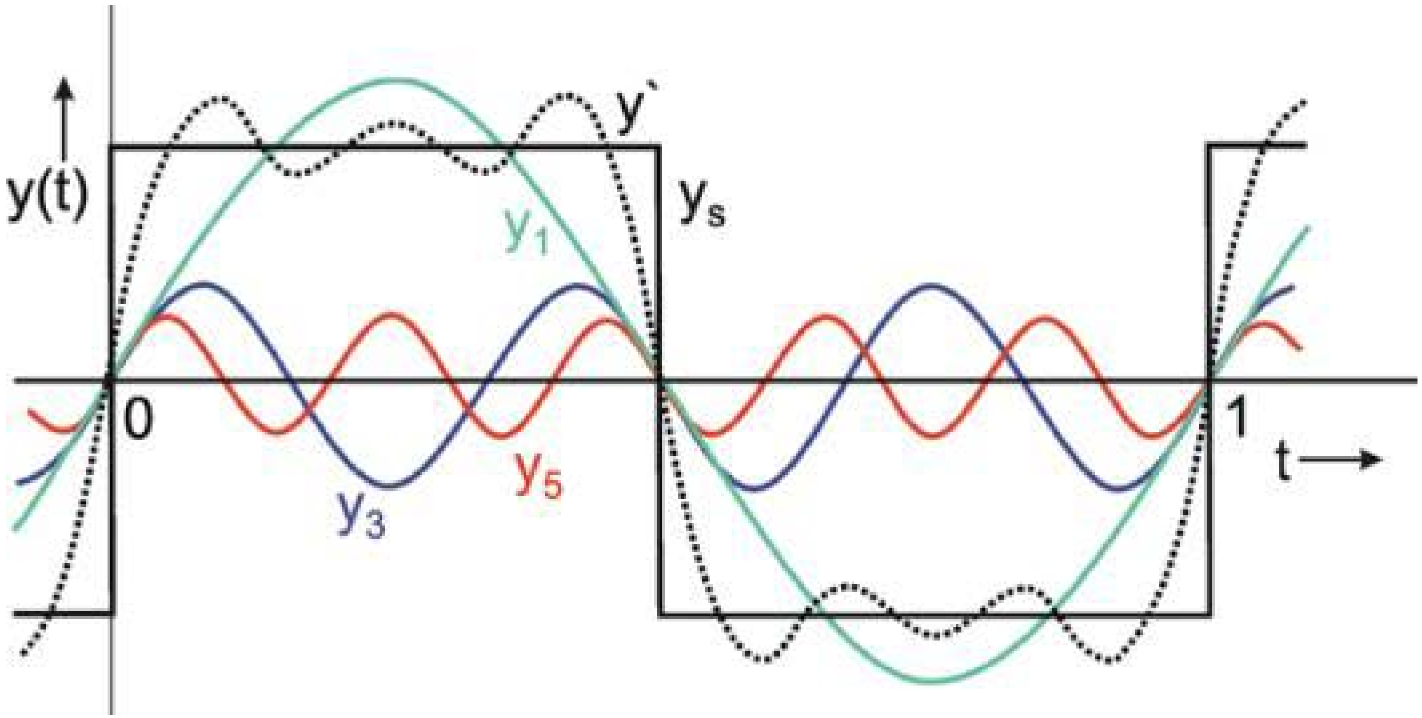
- Vecteur propre v et valeur propre λ :
  $f(v) = \lambda v$
- Matrice et vecteur :
  $A.X = \lambda X$
- Diagonalisation : base de vecteurs propres (e_i) associé à des valeurs propres (λ_i) tels que $f(e_i) = \lambda_i e_i$
- Diagonalisation possible avec une base de vecteurs propres orthonormée possible si la matrice A et symétrique et définie positive (dans eu repère Euclidien)
- La matrice est diagonale dans la base formée des vecteurs propres

Transformée de Fourier 1

- Toute fonction "ayant de bonnes propriétés" s'écrit comme une combinaison linéaire (finie ou infinie) de fonctions sinusoïdales (décomposition de Fourier)
- L'ensemble des fonctions "ayant de bonnes propriétés" est un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie)
- La transformée de Fourier est une application linéaire de l'espace des fonctions initial vers l'espace transformé
- Trois classes de fonctions selon le type de signal:
  - Continu non périodique
  - Continu périodique
  - Discret périodique

Transformée de Fourier 2

Exemple : décomposition en série de Fourier



Transformée de Fourier 3

- Trois classes de fonctions (cas d'un signal monodimensionnel):
  - Signal continu non périodique, intégrale infinie :
    $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi ux} F(u) du$ (complexe)
  - Signal continu périodique (2π), somme infinie :
    $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{inx} F(n)$ (complexe) ou
    $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ (réel)
  - Signal discret périodique (N valeurs entières de x, f et F sont des vecteurs de dimension N), somme finie :
    $f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{inx} F(n) \quad 0 \leq x < N$ (complexe)
- Transformée directe : $f \rightarrow F$, inverse : $F \rightarrow f$

Transformée de Fourier 4

- Les fonctions "sinusoïde" forment une base orthonormée de l'espace vectoriel des fonctions "ayant de bonnes propriétés", e.g.
  - Signal continu périodique (2π) :
    $f_n(x) = e^{inx}$ pour $n \in Z$ (complexe) ou
    $f_n(x) = \cos nx$ pour $n \in N$ et
    $g_n(x) = \sin nx$ pour $n \in N^*$ (réel)
  - Calcul des coefficients :
    $F(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx$
    $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$
    $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$

Transformée de Fourier 5

- Transformée cosinus d'une fonction réelle, cas d'un signal monodimensionnel périodique discret, N valeurs :
  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} C(n) \cos \frac{(2x+1)n\pi}{2N} F(n)$
  avec $C(n) = 1$ si $n = 0$ et $C(n) = \sqrt{2}$ si $n \neq 0$
  $0 \leq x < N$ et $0 \leq n < N$
- Seulement des fonctions cosinus mais deux fois plus
- Cas d'un signal bidimensionnel, N x M valeurs:
  $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} C(n)C(m) \cos \frac{(2x+1)n\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)m\pi}{2N} F(n,m)$
  $0 \leq x < N$ et $0 \leq y < M$ et $0 \leq n < N$ et $0 \leq m < M$
- Transformée initiale (directe) :
  $F(n,m) = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} C(x)C(y) \cos \frac{(2x+1)n\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)m\pi}{2N} f(x,y)$